අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2024
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2024
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2024

සංයුක්ත ගණිතය II
இணைந்த கணிதம் II
Combined Mathematics II

10 S II

B කොටස

* ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

(මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි g මගින් ගුරුත්වජ ත්වරණය දැක්වෙයි.)

11. (*a*) සෘජු මාර්ගයක වූ O ලක්ෂ්‍යයක සිට කාලය $t = 0$ s හිදී නිශ්චලතාවයෙන් ගමන් ආරම්භ කරන P මෝටර් රථයක් f m s^{-2} නියත ත්වරණයකින් තත්පර 5 ක් ගමන් කරයි. පසුව එය $t = 5$ s හිදී ලබාගත් නියත වේගයෙන් තවත් තත්පර 5 ක් ගමන් කර $t = 10$ s හිදී f m s^{-2} ක නියත මන්දනයකින් මන්දනය වී A ලක්ෂ්‍යයකදී නිශ්චලතාවයට පැමිණේ. එසැනින් තම දිශාව වෙනස් කරන P මෝටර් රථය f m s^{-2} නියත ත්වරණයෙන්ම එම මාර්ගයේම නැවත O දෙසට ගමන් කරයි.

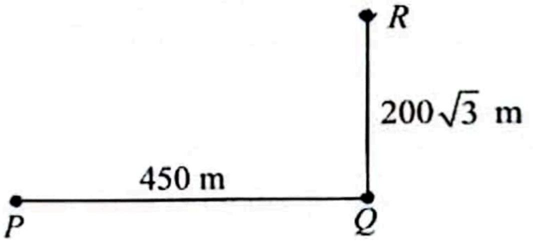
එම මාර්ගයේම O ලක්ෂ්‍යයේ සිට $t = 10$ s හිදී $10f$ m s^{-1} ක ආරම්භක වේගයෙන් ගමන් ආරම්භ කරන Q මෝටර් රථයක් f m s^{-2} නියත මන්දනයෙන් P මෝටර් රථය දෙසට ගමන් කරයි. A ලක්ෂ්‍යයේදී P නිශ්චලතාවයට පත්වන විට, P හා Q අතර දුර 125 m බව දී ඇත. එකම රූපසටහනක P හා Q හි චලිත සඳහා, $t = 0$ s සිට ඒවා මුණගැසෙන මොහොත දක්වා ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.

(i) $f = 10$,

(ii) P හා Q මෝටර් රථ $t = 17.5$ s හිදී මුණගැසෙන

බව පෙන්වන්න.

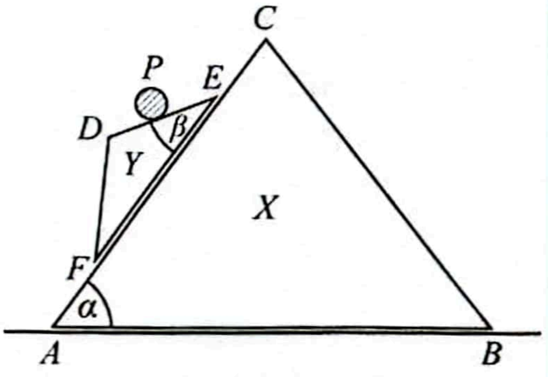
(*b*) P, Q සහ R බෝට්ටු තුනක් සරල රේඛීය පථවල ඒකාකාර වේගවලින් ගමන් කරයි. එක්තරා මොහොතකදී P බෝට්ටුවෙන් 450 m දුරක් නැගෙනහිරින් Q බෝට්ටුව පිහිටන අතර Q බෝට්ටුවෙන් $200\sqrt{3}$ m දුරක් උතුරින් R බෝට්ටුව පිහිටයි (රූපය බලන්න). P බෝට්ටුව, Q බෝට්ටුව හමුවීමේ අපේක්ෂාවෙන් යාත්‍රා කරන අතර Q බෝට්ටුව, R බෝට්ටුව හමුවීමේ අපේක්ෂාවෙන් යාත්‍රා කරයි.



P බෝට්ටුව තත්පර 45 කින් Q බෝට්ටුව හමුවන බවත්, Q බෝට්ටුව තත්පර 20 කින් R බෝට්ටුව හමුවන බවත් දී ඇත.

Q බෝට්ටුවට සාපේක්ෂව P බෝට්ටුවෙහි වේගය 10 m s^{-1} බව පෙන්වා Q බෝට්ටුව R බෝට්ටුව හමුවන මොහොතෙහිදී P බෝට්ටුව හා R බෝට්ටුව අතර දුර සොයන්න.

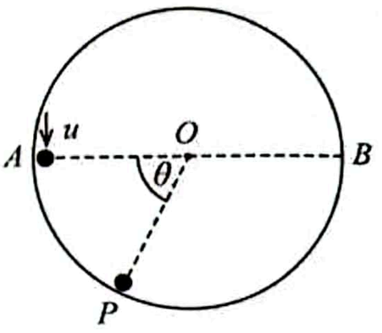
12. (*a*) X, Y සුමට ඒකාකාර කුඤ්ඤ දෙකක හා P අංශුවක ස්කන්ධ කේන්ද්‍ර තුළින් වූ සිරස් හරස්කඩ, රූපයෙන් දැක්වේ. AC, DE හා EF රේඛා ඒවා අඩංගු මුහුණත්වල උපරිම බෑවුම් රේඛා වන අතර $B\hat{A}C = \alpha$ හා $D\hat{E}F = \beta\,(<\alpha)$ වේ. ස්කන්ධය M_1 වූ X කුඤ්ඤයේ AB අයත් මුහුණත සුමට තිරස් මේසයක් මත තබා ඇත. ස්කන්ධය M_2 වූ Y කුඤ්ඤයේ EF අයත් මුහුණත X හි AC අයත් මුහුණත මත තබා ඇත. ස්කන්ධය m වූ P අංශුව DE මත තබා ඇත. පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදාහරිනු ලැබේ. Y කුඤ්ඤය එහි EF මුහුණත X හි AC අයත් මුහුණත ස්පර්ශ කරමින් චලනය වන හා P අංශුව DE ස්පර්ශ කරමින් චලනය වන අතරතුර, X කුඤ්ඤයේ ත්වරණය නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලියා දක්වන්න.



Scanned with CamScanner

(*b*) සුමට අභ්‍යන්තර පෘෂ්ඨයක් සහිත අරය a වන අචල ඍජු-වෘත්තාකාර කුහර සිලින්ඩරයක තිරස් අක්ෂයට ලම්බක සිරස් හරස්කඩක් යාබද රූපයෙන් දැක්වේ.

O ලක්ෂ්‍යය එහි කේන්ද්‍රය ද, A හා B එහි තිරස් විෂ්කම්භයේ අන්ත ද වේ. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් u වේගයෙන් සිලින්ඩරයේ අභ්‍යන්තර පෘෂ්ඨය මත A සිට සිරස්ව යටි දිශාවට ප්‍රක්ෂේපණය කරනු ලැබේ. P, සිලින්ඩරය සමග ස්පර්ශව ඇතිව, θ කෝණයකින් OP හැරුණු විට P හි වේගය v යැයි ගනිමු.



$v^2 = u^2 + 2ga\sin\theta$ බව පෙන්වන්න.

$\theta = \frac{7\pi}{6}$ විට, P සිලින්ඩරයේ අභ්‍යන්තර පෘෂ්ඨය හැර යන බව දී ඇත. $u = \sqrt{\frac{3ga}{2}}$ බව පෙන්වන්න.

13. ස්වභාවික දිග a වන සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරක් O අචල ලක්ෂ්‍යයකට ද අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වූ P අංශුවකට ද ඈඳා, P සිරස් චලිතයේ යොදවා ඇත. අංශුව සිරස්ව පහළට ගමන් කරන විට O ට පහළින් $OA = a$ වන A ලක්ෂ්‍යය පසු කරද්දී එහි වේගය $\sqrt{2ag}$ වේ. O ට $3a$ පහළින් වූ B ලක්ෂ්‍යයේදී අංශුව ක්ෂණික නිශ්චලතාවයට පැමිණේ. තන්තුවේ ප්‍රත්‍යස්ථතා මාපාංකය $\frac{3}{2}mg$ බව පෙන්වන්න.

තව ද, P හි චලිත සමීකරණය $\ddot{x} + \omega^2\left(x - \frac{5a}{3}\right) = 0$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න; මෙහි $x > a$ සඳහා $OP = x$ වන අතර $\omega\ (> 0)$ නිර්ණය කළ යුතු නියතයක් වේ.

ඉහත චලිත සමීකරණය, $X = x - \frac{5a}{3}$ ලෙස ගෙන නැවත ලියන්න.

අංශුවේ මෙම සරල අනුවර්තී චලිතයේ කේන්ද්‍රය, විස්තාරය හා ආවර්ත කාලය සොයන්න.

$\dot{X}^2 = \omega^2(C^2 - X^2)$ සූත්‍රය භාවිතයෙන් P හි උපරිම වේගය සොයන්න; මෙහි C යනු විස්තාරය වේ.

එය ඉහළට යාමේදී, P යන්තමින් O ට ළඟා වන බව පෙන්වන්න.

B සිට O දක්වා ගමන් කිරීමට P ට ගතවන මුළු කාලය $\sqrt{\frac{2a}{27g}}\left(2\pi + 3\sqrt{3}\right)$ බව පෙන්වන්න.

ඉහත සරල අනුවර්තීය චලිතය ආරම්භ කරනු ලැබුවේ P පහළට ඇද අත හැරීමෙන් නම්, තන්තුව එහි ස්වභාවික දිගේ සිට කොපමණ දුරක් ඇදිය යුතු දැයි ප්‍රකාශ කරන්න.

14.(*a*) $OA = a$, $OC = 2a$ හා $A\hat{O}C = \frac{\pi}{3}$ වන $OABC$ සමාන්තරාස්‍රයක් යැයි ගනිමු. **u** හා **v** යනු පිළිවෙළින් $\overrightarrow{OA}$ හා $\overrightarrow{OC}$ දිශාවලට වූ ඒකක දෛශික යැයි ද ගනිමු.

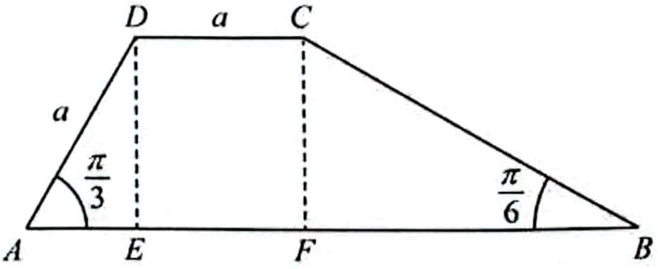
$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}a\mathbf{u} + 2a\mathbf{v}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි D යනු BC හි මධ්‍යලක්ෂ්‍යය වේ.

OD යන්න DE ට ලම්බ වන පරිදි AB මත වූ ලක්ෂ්‍යය E යැයි ගනිමු.

$\overrightarrow{DE} = \frac{a}{2}\mathbf{u} - \frac{a}{3}\mathbf{v}$ බව පෙන්වන්න.

OA හා DE දික්කළ රේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය F යැයි ගනිමු. $\overrightarrow{OF} = \frac{7a}{2}\mathbf{u}$ බව පෙන්වන්න.

(*b*) AB හා DC සමාන්තර ද $A\hat{B}C = \frac{\pi}{6}$, $B\hat{A}D = \frac{\pi}{3}$ හා $AD = DC = a$ ද වන $ABCD$ ත්‍රැපීසියමක් යැයි ගනිමු. $A\hat{E}D = A\hat{F}C = \frac{\pi}{2}$ වන පරිදි AB මත වූ ලක්ෂ්‍ය E හා F වේ (රූපය බලන්න). විශාලත්ව $P, \alpha P, \beta P$ හා γP වූ බල පිළිවෙළින් AB, BC, DC හා AD දිගේ අක්ෂර අනුපිළිවෙළින් දැක්වෙන දිශාවලට ක්‍රියාකරයි.

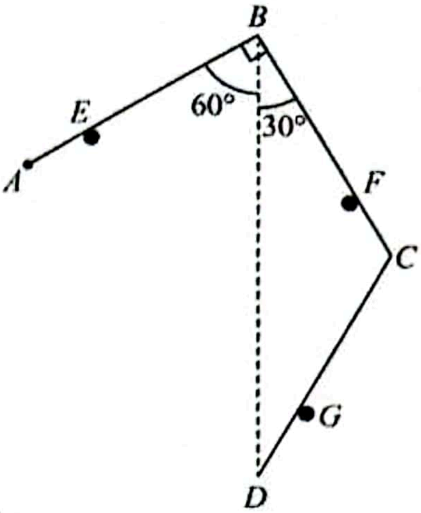


ඒවායේ සම්ප්‍රයුක්ත බලය $\sqrt{7}P$ විශාලත්වයකින් යුත් බව හා එය E හා C ලක්ෂ්‍ය හරහා E සිට C අතට යන බව ද දී ඇත. α, β හා γ හි අගයන් සොයන්න.

දැන්, පද්ධතියට බල යුග්මයක් එකතු කරනු ලබන්නේ නව පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාව F ලක්ෂ්‍යය

Scanned with CamScanner

15. (*a*) $4a$ සමාන දිගින් හා W සමාන බරින් යුත් AB, BC හා CD ඒකාකාර දඬු තුනක් B හා C අන්තවලදී සුමටව සන්ධි කර ඇත. A අන්තය අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුමට ලෙස අසවු කර ඇත. රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි, $AE = CF = DG = a$, $A\hat{B}D = 60°$, $C\hat{B}D = 30°$ හා BD සිරස් වන පරිදි දඬු තුන සිරස් තලයක සමතුලිතව තබා ඇත්තේ E, F හා G සුමට නාදැති තුනක් මත තැබීමෙනි.



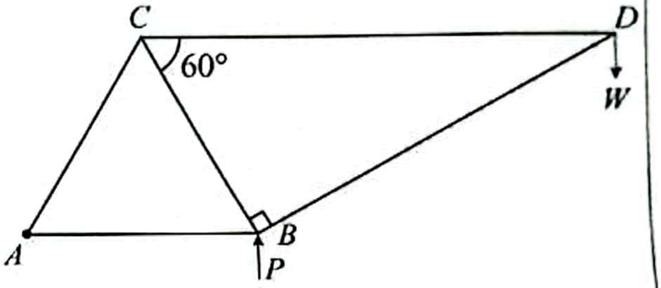
(i) G නාදැත්ත මගින් CD දණ්ඩ මත යොදන ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය $\frac{W}{3}$ බව ද,

(ii) F නාදැත්ත මගින් BC දණ්ඩ මත යොදන ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය $\frac{11W}{9}$ බව ද,

පෙන්වන්න.

AB දණ්ඩ මගින් BC දණ්ඩ මත B සන්ධියේදී යොදන ප්‍රතික්‍රියාව ද සොයන්න.

(*b*) රූපයේ දැක්වෙන රාමු සැකිල්ල, ඒවායේ අන්තවලදී සුමට ලෙස සන්ධි කළ AB, BC, CA, CD හා DB සැහැල්ලු දඬු පහකින් සමන්විත වේ. $AB = BC = CA = 2a$, $C\hat{B}D = 90°$ හා $B\hat{C}D = 60°$ බව දී ඇත. W භාරයක් D සන්ධියෙන් එල්ලා ඇති අතර රාමු සැකිල්ල A හිදී අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුමට ලෙස සන්ධි කර AB තිරස්ව සිරස් තලයක සමතුලිතව තබා ඇත්තේ එයට B සන්ධියෙහිදී සිරස්ව උඩු අතට යෙදූ P බලයක් මගිනි.



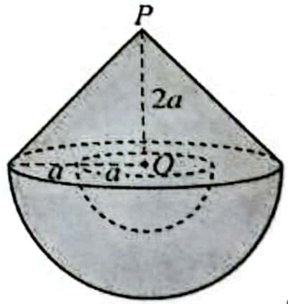
(i) P හි අගය සොයන්න.

(ii) බෝ අංකනය භාවිතයෙන් D, C හා B සන්ධි සඳහා ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් අඳින්න.

ඒ නයින්, දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල, ආතති ද තෙරපුම් ද යන්න ප්‍රකාශ කරමින් සොයන්න.

16. අරය a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{3}{8}a$ දුරකින් පිහිටන බව හා උස h වූ ඒකාකාර ඝන සෘජු-වෘත්තාකාර කේතුවක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි පතුලෙහි කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{1}{4}h$ දුරකින් පිහිටන බව ද පෙන්වන්න.

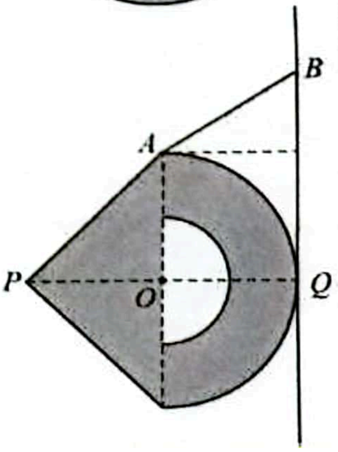
අරය a හා කේන්ද්‍රය O වූ අර්ධ ගෝලාකාර කොටසක් අරය $2a$, කේන්ද්‍රය O හා ඝනත්වය ρ වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයකින් කපා ඉවත් කරනු ලැබේ. දැන්, පතුලෙහි අරය $2a$ හා උස $2a$ වූ ඝනත්වය $\lambda\rho$ වූ ඒකාකාර ඝන සෘජු වෘත්තාකාර කේතුවක් අර්ධ ගෝලයෙහි ඉතිරි කොටසට යාබද රූපයේ පෙන්වා ඇති ආකාරයට දෘඪ ලෙස සවි කර ඇත. මෙලෙස සාදාගනු ලැබූ S වස්තුවෙහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, P සිට $\frac{(48\lambda+157)}{8(4\lambda+7)}a$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න; මෙහි P යනු S හි ඝන කේතුවෙහි ශීර්ෂය වේ.



S හි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, O හි පිහිටීම සඳහා λ හි අගය සොයන්න.

දැන්, λ ට මෙම අගය ඇතැයි සිතමු.

Q යනු දික්කළ PO රේඛාව S හි පිටත අර්ධ ගෝලාකාර පෘෂ්ඨය හමුවන ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු. තව ද, A යනු S හි වෘත්තාකාර දාරය මත වූ ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ද ගනිමු. S වස්තුව රළු සිරස් බිත්තියකට එරෙහිව සමතුලිතව තබා ඇත්තේ A ලක්ෂ්‍යයට හා සිරස් බිත්තිය මත වූ B අචල ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳා ඇති සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක ආධාරයෙනි. සමතුලිත පිහිටුමේදී S හි පිටත අර්ධ ගෝලීය පෘෂ්ඨය Q ලක්ෂ්‍යයෙහිදී බිත්තිය ස්පර්ශ කරයි. O, A, B, P හා Q ලක්ෂ්‍ය බිත්තියට ලම්බ සිරස් තලයක පිහිටයි (යාබද රූපය බලන්න). $\mu \geq 1$ බව පෙන්වන්න; මෙහි μ යනු S හි පිටත අර්ධ ගෝලීය පෘෂ්ඨය හා බිත්තිය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය වේ.



Scanned with CamScanner

17. (a) පාටින් හැර අන් සෑම අයුරකින්ම සර්වසම සුදු පාට බෝල 2 ක් හා කළු පාට බෝල 3 ක් B_1 පෙට්ටියක අඩංගු වේ. බෝල 3 ක් B_1 පෙට්ටියෙන් සසම්භාවී ලෙස, හිස් B_2 පෙට්ටියකට මාරු කරනු ලැබේ. ඉන්පසු B_2 පෙට්ටියෙන් සසම්භාවී ලෙස බෝලයක් ඉවතට ගනු ලැබේ.

(i) B_2 පෙට්ටියෙන් ඉවතට ගනු ලැබූ බෝලය සුදු පාට වීමේ,

(ii) B_2 පෙට්ටියෙන් ඉවත ගනු ලැබූ බෝලය සුදු පාට බව දී ඇති විට, B_1 පෙට්ටියෙන් B_2 පෙට්ටිය තුළට සුදු පාට බෝල 2 ක් හා කළු පාට බෝල 1 ක් මාරු කර තිබීමේ

සම්භාවිතාව සොයන්න.

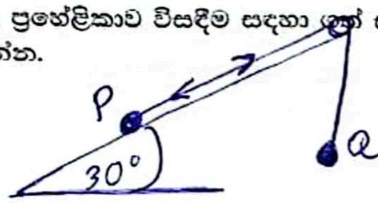
(b) සිසුන් 20 දෙනෙකු ප්‍රහේලිකාවක් විසඳීම සඳහා ගත් කාලයන් එම එක් එක් කාලයෙන් 10 ක් අඩුකර ඉන්පසු 2 න් බෙදීම මගින් කේත කර ඇත.

සංඛ්‍යාත 2 ක් අතුරුදහන් වූ කේත කළ දත්තයන්හි සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තිය පහත දී ඇත:

කේත කළ කාලයන් (මිනිත්තු වලින්)	සංඛ්‍යාතය
0 – 2	2
2 – 4	f_1
4 – 6	9
6 – 8	f_2
8 – 10	1

කේත කළ කාලයන්හි නිමානය කළ මධ්‍යන්‍යය මිනිත්තු 4.4 බව දී ඇත. $f_1 = 6$ හා $f_2 = 2$ බව පෙන්වන්න. කේත කළ කාලයන්හි සම්මත අපගමනය හා මාතය නිමානය කරන්න.

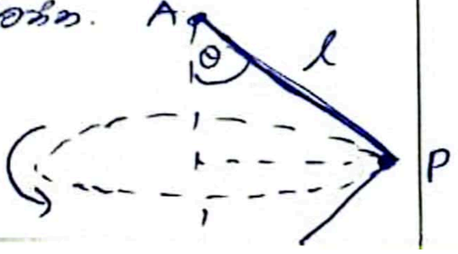
දැන්, ප්‍රහේලිකාව විසඳීම සඳහා ගත් සැබෑ කාලයන්හි මධ්‍යන්‍යය, සම්මත අපගමනය හා මාතය නිමානය කරන්න.



* * *

(3) ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් තිරසට ආනතිය 30° ක් වූ රළු ආනත තලයක් මත ඇත. P අංශුව, ආනත තලයේ ඉහළින් වූ අචල සුමට කප්පියක් මතින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් ස්කන්ධය 4m වූ සිරස්ව නිදහසේ එල්ලෙන Q අංශුවකට ඈඳා ඇත. ආනත තලය මත වූ තන්තු කොටස තලයේ උපරිම බෑවුම් රේඛාවක් දිගේ පිහිටා ඇත. P හා තලය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය $\frac{1}{2}$ වේ. තන්තුව තදව ඇතිව පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. P, ආනත තලයේ ඉහළට චලනය වන බව දැනේ. තන්තුවේ ආතතිය ත්වරණය සහිතව ඉවාරයාවන් පරිහරණය ලබා ගන්න.

ස්කන්ධය 2m වූ P අංශුවක්, සිරස් රේඛාවක් මත පිහිටි A හා B අචල ලක්ෂ්‍ය දෙකකට, එක එකක දිග l වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තු දෙකක් මගින් ඈඳා ඇත. රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි තන්තු දෙකම තදව හා සිරස සමග θ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයක් සාදමින් ω නියත කෝණික ප්‍රවේගයකින් P අංශුව තිරස් වෘත්තයක චලනය වේ. AP තන්තුවේ ආතතිය $m(l\omega^2 + g\sec\theta)$ බව පෙන්වන්න.



Scanned with CamScanner